Knotenüberdeckungen (KÜ)

- Überwachung eines Museums durch Wächter
  - Kanten entsprechen Gängen, Knoten entsprechen Winkeln
- Def.: Sei $G=(V,E)$ ein Graph. $K\subseteq V$ ist eine Knotenüberdeckung, wenn es für alle $e\in E$ ein $v\in K$ gibt, so dass $v\in e$.
- Problem: Finde eine minimale Knotenüberdeckung, d.h., eine Knotenüberdeckung mit so wenigen Knoten wie möglich.

KÜ und Matchings

- Def.: $M \subseteq E$ ist ein Matching, wenn $e_1 \cap e_2 = \varnothing$ für alle $e_1, e_2 \in M$ mit $e_1 \neq e_2$.
- Def.: Ein Matching M heisst inklusions-maximal, wenn keine Obermenge von M ein Matching ist.
- Lemma: Sei M ein Matching und K eine Knotenüberdeckung. Dann gilt $|M| \leq |K|$.
  - Beweis: Jede Kante in E, und somit auch jede in M, ist inzident mit (mindestens) einem Knoten in K. Diese Knoten sind alle verschiedenen, da M ein Matching ist.

KÜ und Matchings

- Algorithmus, der ein inklusions-maximales Matching und eine 2-Approximation für das Problem einer minimalen Knotenüberdeckung liefert
  - $M=\emptyset$; $K=\emptyset$
  - While $\exists e \in E$
  - $\quad M=M\cup\{e\}$; $K=K\cup e$
  - $\quad G=(V,E)=G[V\setminus e]$
  - Endwhile
- Lineare Laufzeit
- Es ist kein Algorithmus mit niedrigerer konstanter Approximationsgüte bekannt.

KÜ, Cliquen und unabhängige Mengen

- Def.: $V' \subseteq V$ ist eine Clique, wenn $\{u,v\} \in E$ für alle $u,v \in V'$ mit $u \neq v$.
- Def.: $V' \subseteq V$ ist eine unabhängige Menge, wenn $\{u,v\} \notin E$ für alle $u,v \in V'$.
- Folgende Aussagen sind äquivalent:
  1. K ist eine Knotenüberdeckung in G
  2. $V \setminus K$ ist eine unabhängige Menge in G
  3. $V \setminus K$ ist eine Clique in $\overline{G}$

  - 1⇒2: Indirekt. Angenommen es gäbe eine Kante, so dass beide Endknoten in $V \setminus K$ (und somit nicht in K) lägen. Dann wäre K keine Knotenüberdeckung.
  - 2⇒1: Jede Kante inzidiert mit einem Knoten, der nicht in $V \setminus K$ (und somit in K) liegt.

Finden maximaler unabhängiger Mengen

- KÜ Approximationsalgorithmus unbrauchbar
- Inklusions-maximale unabhängige Mengen
    - Jede maximale unabhängige Menge ist auch inklusions-maximal.
    - Finden einer inklusions-maximalen unabhängigen Menge ist effizient möglich.
    - Finden einer weiteren (sofern eine existiert) ist ebenfalls effizient möglich.
- Satz (Moon & Moser, 1965): Ein Graph enthält höchstens $3^{|V|/3}$ (inklusions-)maximale unabhängige Mengen.
    - Diese Schranke ist scharf, d.h. es gibt Graphen, die tatsächlich $3^{|V|/3}$ maximale unabhängige Mengen enthalten.

Schlechte Nachrichten

- Satz: Zu entscheiden, ob ein Graph eine unabhängige Menge mit mindestens k Knoten enthält ist NP-vollständig.
  - Es existiert sogar kein c-Approximationsalgorithmus für konstantes c wenn P≠NP.
- Korollar: Die folgenden Probleme sind NP-vollständig:
  - Enthält ein Graph eine Clique mit mindestens k Knoten?
  - Enthält ein Graph eine Knotenüberdeckung mit höchstens k Knoten?
  - Teilgraph-Isomorphie
- Für die folgenden Probleme existiert kein effizienter Algorithmus wenn P≠NP:
  - Finden einer maximalen unabhängigen Menge
  - Finden einer maximalen Clique
  - Finden einer minimalen Knotenüberdeckung